Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
Республика Татарстан, 9 декабря 2025 г.

8 класс

1. В физкультурном зале находятся тренер и несколько спортсменов. Возраст тренера на 40 лет больше среднего возраста спортсменов и на 35 лет больше среднего возраста всех присутствующих (включая его самого). Сколько спортсменов в зале?

2. Могут ли суммы цифр двух соседних натуральных чисел (то есть чисел n и $n+1$) отличаться *а*) на 2024?; *б*) на 2025?

3. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наименьшей*, и укажите её значение.

4. Пятьдесят команд сыграли однокруговой турнир за 49 дней, каждая команда сыграла с каждой, играя по одному матчу в день. За победу в матче давали 3 очка, а за ничью – одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа её поражений, либо вдвое меньше числа её побед. Больше всех очков набрал «Зенит». Докажите, что и за два дня до конца соревнования у «Зенита» очков было больше, чем у любой другой команды.

5. В треугольнике ABC угол C равен 60°. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AB = AQ + BP$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

2. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наибольшей*, и укажите её значение.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 400?

4. На вечеринке собрались 10 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K. Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Сколько существует 10-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 7?

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдётся такое действительное число y, что $f(x) = f(y) + y$. Найдите наименьшее возможное значение a.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 800?

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Сколько существует 11-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

2. Все члены геометрической прогрессии — целые числа. Верно ли, что сумма квадратов *а*) трёх; *б*) четырёх последовательных членов этой прогрессии всегда делится на сумму этих членов?

3. Пусть x, y, z — различные целые числа такие, что $xy+yz+zx=47$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2+z^2$.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.